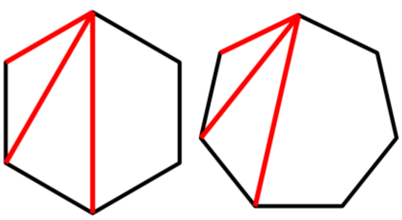
Uitwerking Puzzel 92-4 **Wobien Doyer**
Wie wint? **Lieke de Rooij**

Deze puzzel was gebaseerd op een van de vermoedens van Erdős: het 'distinct distances problem'. Het werd in *Pythagoras* mooi uitgelegd en als volgt beschreven[1]:
'Teken *n* punten in een plat vlak en verbind elk tweetal punten met een rechte lijn. Lijnen van verschillende lengte geef je verschillende kleuren, lijnen van gelijke lengte krijgen dezelfde kleur. De vraag die Erdős in 1946 stelde is: Wat is het kleinst mogelijke aantal kleuren voor *n* punten?'
We bestudeerden hierbij drie verschillende methoden:
1. Zet alle punten op de hoekpunten van een regelmatige *n*-hoek. Het daarmee te realiseren kleinste aantal verschillende afstanden noemen we $R(n)$.
2. Zet alle punten op roosterpunten van orthogonaal roosterpapier (het bekende vierkante ruitjes papier). Het kleinst aantal benodigde kleuren noemen we $V(n)$.
3. Zet alle punten op roosterpunten van isometrisch roosterpapier (= rooster van gelijkzijdige driehoeken). Het kleinst aantal benodigde kleuren noemen we $D(n)$.

We geven eerst kort de vragen met de antwoorden. Daarna komen de vragen en antwoorden nog eens, maar dan met meer uitleg.

Opgave 1: Bepaal hoe $R(n)$ afhangt van *n*. Antwoord: $R(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
Opgave 2: Bepaal $V(25)$ en vergelijk dat met $R(25)$. Antwoord: $V(25) = 14$ en $R(25) = 12$, dus voor $n = 25$ is methode 1 'voordeliger'.
Opgave 3: Bepaal behalve lengte 5 en $\sqrt{50}$ nog minstens twee paren lengtes ≤11 die niet ontstaan door symmetrieën van het rooster. Antwoord: $\sqrt{65}$ en $\sqrt{85}$
Opgave 4: Bepaal voor welke *n* voor het eerst geldt dat methode 2 gunstiger is dan methode 1, dus $V(n) < R(n)$. Bepaal zelf hoe u de punten daarbij op het rooster plaatst. Antwoord: $V(112) = 55$ en $R(112) = 56$, dus $V(112) < R(112)$.
Opgave 5: Onderzoek voor welke *n* er voor het eerst geldt: $R(n) - D(n) \geq 2$.
Antwoord: $R(26) - D(26) \geq 2$
Opgave 6: Bepaal de kleinste twee afstanden tussen roosterpunten op isometrisch roosterpapier die elk minstens 2 keer voorkomen, afgezien van wat direct uit de symmetrieën van het rooster volgt.
Antwoord: 7 en $\sqrt{91}$

Opgave 1: Bepaal hoe $R(n)$ afhangt van *n*. Antwoord: $R(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
($n/2$ naar beneden afgerond), of in computertaal: integerdeling (zie figuur 1).

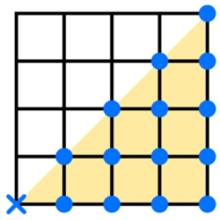

figuur 1

Omdat het voor punten op roosterpapier lang niet vanzelfsprekend is hoe we de punten bij gegeven *n* het beste kunnen plaatsen kunnen we voor grotere waarden van *n* in feite alleen maxima bepalen van $V(n)$ en $D(n)$. Het is dan natuurlijk de bedoeling die maxima zo scherp mogelijk te stellen.

Om de verschillende afstanden tussen punten in een rooster te beschrijven ligt het voor de hand om **driehoeken** te bekijken met twee zijden langs de roosterlijnen. De derde zijde bepaalt dan de afstand.

Voor het orthogonale rooster zijn dat rechthoekige ‘driehoeken’, voor het isometrische rooster stomphoekige ‘driehoeken’ met een hoek van 120° (*). We zullen de zijden langs de roosterlijnen roosterzijden noemen en de derde zijde ‘de afstand’.
In beide roosters ligt de vorm van zo’n driehoek vast door twee natuurlijke getallen die de lengte in roostereenheden van de roosterzijden aangeven. Die getallen vormen een **getallenpaar**, waarbij we steeds de grootste voorop zullen zetten. Natuurlijk is de door (a, b) beschreven afstand in een orthogonaal rooster gelijk aan $\sqrt{a^2+b^2}$.
In een isometrisch rooster leert een beetje vlakke meetkunde dat bij het getallenpaar (a, b) de lengte $\sqrt{a^2+b^2+ab}$ hoort.

We bekijken eerst methode 2, dus een orthogonaal rooster.
Opgave 2: Bepaal $V(25)$ en vergelijk dat met $R(25)$.
Omdat 25 een kwadraat is lag het voor de hand om althans aanvankelijk de roosterpunten binnen en op de rand van een vierkant te plaatsen. Dat is dan een vierkant met zijden lengte 4 en dus 5 × 5 roosterpunten, zie figuur 2.



figuur 2

We zullen steeds zoeken naar een vlak (de gele driehoek) waarop we alle ‘driehoeken’ die in de figuur voorkomen op overzichtelijke wijze kunnen afbeelden zodat we ze gemakkelijk kunnen tellen. We geven eerst het vlak en de manier waarop we de driehoeken daarop gaan afbeelden. Dan geven we de afbeelding en daarna kunnen we tellen.

In opgave 2 is het vlak de gele driehoek. We gaan de ‘driehoeken’ afbeelden met de scherpste hoek op het blauwe kruisje, de langste roosterzijde horizontaal en de rechte hoek rechtsonder. De bijbehorende afstand loopt dan van het kruisje naar één van de blauwe stippen.
Door de symmetrie van het vierkant kunnen we elke ‘driehoek’ in het rooster op zo’n ‘driehoek’ in het gele vlak afbeelden via verschuiven en/of roteren om het middelpunt van het vierkant of spiegelen in één van de symmetrieassen van het vierkant.

Het aantal verschillende niet-congruente ‘driehoeken’ binnen het rooster is dan gelijk aan het aantal blauwe stippen, dus we tellen de stippen.
Van links naar rechts staan er 2, 3, 4 en 5 blauwe stippen onder elkaar. Het aantal is dus
$\sum_{i=2}^{5} i = \frac{7 \cdot 4}{2} = 14$
We kunnen dat (voor later gebruik) algemener maken: Als we een vierkant rooster hebben met $k \times k$ roosterpunten dan hebben we daarvoor $\sum_{i=2}^{k} i = \frac{(k+2)(k-1)}{2}$ ‘driehoeken’ nodig.

Natuurlijk is het mogelijk dat verschillende ‘driehoeken’ gelijke afstanden beschrijven, zoals de ‘driehoeken’ (5, 0) en (4, 3). Daarover later meer. In het rooster van figuur 2 komt dat niet voor, dus is het aantal verschillende afstanden gelijk aan het aantal niet-congruente ‘driehoeken’, dus $V(25) \leq 14$.

De vraag is nu: geldt dan ook $V(25) = 14$, m.a.w. is dit de ‘voordeligste’ manier om de punten te plaatsen? Daarvoor zouden we alle mogelijke plaatsingen van de 25 punten in een vierkantenrooster moeten bekijken en dat is lastig. Sommige inzenders, en wij ook, keken ook naar andere plaatsingen, maar een kleinere waarde van $V(25)$ leverde dat niet op. We gaan er voorlopig dus van uit dat inderdaad $V(25) = 14$. Ter vergelijking: $R(25)=12$. Hier is de plaatsing op een regelmatige veelhoek dus ‘voordeliger’.

Bij grotere vierkanten kunnen er zo wel degelijk dubbeltellingen ontstaan, niet alleen bij Pythagoras

(*)We zetten ‘driehoek’ hier tussen aanhalingstekens omdat als de afstand langs een roosterlijn loopt één zijde 0 is.

tripletten zoals we al zagen, maar ook bijvoorbeeld bij getallenparen als (5, 5) en (7, 1), beide met afstand $\sqrt{50}$. Om de waarde van *V* te berekenen zullen we daarvoor dan moeten corrigeren. Er zijn dan gelijke afstanden die niet ontstaan door de symmetrieën in het rooster, maar door gelijke kwadraatsommen (zoals $5^2+5^2 = 1^2 + 7^2 = 50$). Voor het gemak spreken we in het volgende over **dubbelparen**. Een dubbelpaar bestaat dus uit twee verschillende getallenparen met gelijke kwadraatsom.
De hierboven genoemde dubbeltellingen komen voor als beide getallenparen die bij het dubbelpaar horen, gelezen als coördinaten van een punt in het roostervierkant passen. Dat is zo als die vier coördinaten allemaal kleiner zijn dan *k*.

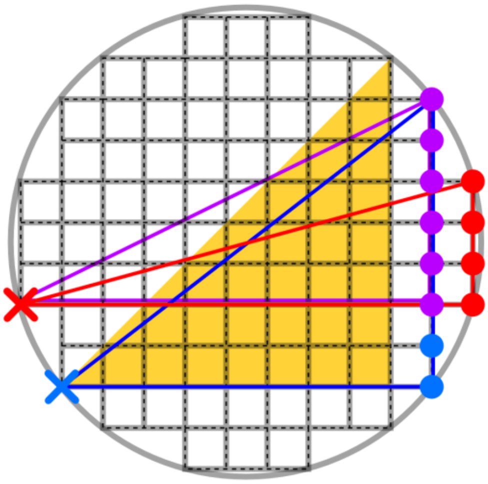
Opgave 3: Bepaal behalve lengte 5 en $\sqrt{50}$ nog minstens twee paren lengtes <=11 die niet ontstaan door symmetrieën van het rooster.
Daarvoor zoeken we dus dubbelparen.
We vroegen twee voorbeelden, maar veel inzenders vonden ze alle drie, met de twee die we al gegeven hadden dus vijf. We geven steeds eerst de afstand, en dan de twee getallenparen:
5 (5, 0), (4, 3); $\sqrt{50}$ (7, 1), (5, 5); $\sqrt{65}$ $(8,1),(7,4)$; $\sqrt{85}$ $(9,2),(7,6)$ en 10 (10, 0), (8, 6).
In verband met opgave 4 vullen we dat nog aan met $\sqrt{125}$ $(11,2),(10,5)$ en $\sqrt{130}$ $(11,3),(9,7)$.

Jan Meerhof en Harm Bakker gaven ook nog het kleinste drietal: (1,18), (6,17) en (10,15) met lengte $\sqrt{325}$. Driedubbeltellingen kunnen dus voorkomen als *k* >18.

Opgave 4: Bepaal voor welke *n* voor het eerst geldt dat methode 2 gunstiger is dan methode 1, dus *V*(*n*) < *R*(*n*). Bepaal zelf hoe u de punten daarbij op het rooster plaatst.
De meeste inzenders (en wij ook) begonnen met kwadraten, zodat een vierkant kan worden opgevuld. Hoe we in dat geval de ‘driehoeken’ tellen zagen we al van opgave 2.
We hebben dan $n = k^2$ en dus $V(k^2) \leq \frac{(k+2)(k-1)}{2} - d$, met *d* = het aantal dubbelparen.
We zoeken naar het vierkant waarvoor *d* groot genoeg is om te zorgen dat *V*(*n*) < *R*(*n*). Dat kan door verschillende waarden van *k* te proberen, maar eleganter is:
$V(k^2) \leq \frac{(k+2)(k-1)}{2} - d < R(k^2)$
voor *k* even: $\frac{(k+2)(k-1)}{2} - d < R(k^2) = \frac{k^2}{2}$
$k^2 + k - 2 - 2d < k^2$
$2d > k - 2$
en voor *k* oneven: $\frac{(k+2)(k-1)}{2} - d < R(k^2) = \frac{k^2-1}{2}$
$2d > k - 1$
Om *d* te bepalen voor verschillende waarden van *k* zoeken we dubbelparen waarvan het grootste getal in de twee getallenparen kleiner is dan *k*. In het rijtje uit opgave 3 is dat grootste getal achtereenvolgens: 5, 7, 8, 9, 10, 11, 11. Er zijn er dus vijf die kleiner zijn dan 11, dus voor *k* =11 is *d* = 5, en 2d = *k*–1. Dat is niet genoeg, maar als *k* = 12 hebben we er 7. Voor *k* = 12 is dus *d* = 7, en 2*d* = *k*+2, en dat is meer dan genoeg.
Controle: voor *k* = 12 hebben we
$V(144) \leq \frac{(k+2)(k-1)}{2} - d = \frac{14 \cdot 11}{2} - 7 = 70$, en *R*(144)= 72 en dus *V*(144) ≤ 70 < *R*(144).
Sommige inzenders lieten het daarbij, maar we vroegen naar de kleinste waarde van *n* waarvoor *V*(*n*) < *R*(*n*), en die hebben we nog niet te pakken.

Enkele inzenders hadden terecht het vermoeden dat een puntenwolk die zo veel mogelijk een gevulde cirkel benadert het voordeligst is. Dat ligt ook wel voor de hand: de cirkelvorm zorgt ervoor dat een gegeven aantal punten zo dicht mogelijk bij elkaar ligt, zodat er zo min mogelijk verschillende afstanden bij betrokken zijn.

Daarom proberen we punten in de hoeken van het vierkant te verwijderen.
De beste oplossing blijken we te vinden door in elke hoek 8 punten weg te laten, en daarmee benaderen we een cirkelvorm. We gaan dan dus kijken naar $V(112)$. Het bleek echter voor velen lastig om bij deze en andere minder eenvoudige invullingen van de getallen op het rooster de juiste waarde van V te bepalen.
We geven hier een methode om een maximum voor $V(112)$ te bepalen (zie figuur 3).
Het rooster in figuur 3 kent dezelfde rotatie- en spiegel-symmetrieën als een vierkant. We kunnen dus, net als in opgave 2, door rotatie en/of spiegeling weer alle ‘driehoeken’ afbeelden op een ‘driehoek’ waarvan de langste roosterzijde horizontaal loopt en waarvan de rechte hoek rechtsonder ligt.
We hoeven dus weer alleen te kijken naar ‘driehoeken’ die aan die eigenschappen voldoen.
We kunnen nu echter niet al die ‘driehoeken’ naar één kruisje schuiven.
We tekenen de grootste rechthoekige gelijkbenige driehoek die in de figuur past met de rechte hoek rechtsonder (de gele driehoek). De rechthoekszijde daarvan is 8. We tekenen ook de grootste rechthoekige driehoeken (weer met rechte hoek rechtsonder) met één rechthoekszijde 9 (blauw), 10 (paars) en 11 (rood).

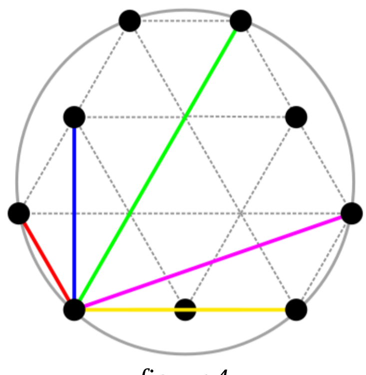

figuur 3: Rooster van 12x12 punten waarvan in elke hoek 8 punten zijn weggelaten.

Van de eerste twee driehoeken ligt het linkerhoekpunt in het blauwe kruisje, van de laatste twee in het rode kruisje. We kunnen dus alle ‘driehoeken’ met horizontale zijde < 10 verschuiven naar het blauwe kruisje en die met horizontale zijde 10 of 11 naar het rode kruisje.

We kennen het aantal verschillende ‘driehoeken’ die in de gele driehoek de afstanden bepalen. Dat is de in opgave 2 gevonden formule met k=9: $\frac{(k+2)(k-1)}{2} = \frac{11\cdot 8}{2} = 44$
Daar moeten we aan toevoegen: de ‘driehoeken’ met horizontale zijde 9 in de blauwe driehoek. Die lopen van het blauwe kruisje naar de blauwe en paarse stippen, dus het zijn er 8. De ‘driehoeken’ met horizontale zijde 10 in de paarse driehoek lopen van het rode kruisje naar de paarse stippen, dus het zijn er 6. De ‘driehoeken’ met horizontale zijde 11 in de rode driehoek lopen van het rode kruisje naar de rode stippen, dus zijn het er 4.
Het totaal aantal verschillende ‘driehoeken’ is dus 44+8+10=62.

Daar moeten we de dubbelparen vanaf trekken. We hadden er 7, maar we moeten controleren of die ook in dit rooster passen. Daarvoor bekijken we de getallenparen die bij de dubbelparen horen. Van die getallenparen passen (11,3), (10, 5), (9,7) en (8,6) binnen de figuur, en alle andere paren zijn kleiner, dus passen ook.
Het aantal verschillende afstanden is dus ook hier 7 kleiner dan het aantal verschillende ‘driehoeken’: $V(112) \leq 62 - 7 = 55$. Omdat $R(112) = 56$ hebben we $V(112) \leq 55 < R(112)$, een veel scherpere afschatting van de kleinste waarde van n dan de oorspronkelijke 144!

Vervolgens bekijken we methode 3: een isometrisch rooster.
Dit zou nog gunstiger kunnen zijn. Zie bijvoorbeeld fig. 4 die mooi binnen een cirkel past, met $D(12) \leq 5$, terwijl methode 1 daar 6 kleuren voor nodig heeft, dus $R(12) - D(12) \geq 1$. (Waarschijnlijk geldt hier het gelijkteken!).

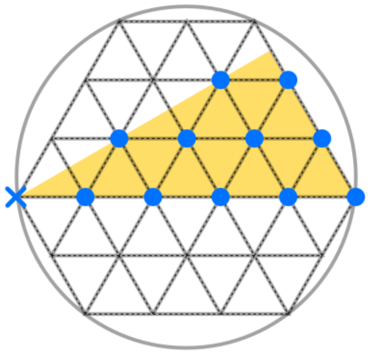

figuur 4

Opgave 5: Onderzoek voor welke n er voor het eerst geldt:

$R(n) - D(n) \geq 2$.
Ook hier proberen we de punten te plaatsen zodat de puntenwolk een gevulde cirkel benadert. De meeste inzenders kwamen zo op regelmatige 6-hoeken, of daarvan door het verwijderen van punten ontstane figuren, met respectievelijk met 37 of 31 punten. Maar het blijkt dat een grotere versie van figuur 4, met 27 punten voordeliger is (zie fig. 5). Ben Groot was de enige die dit vond.

Voor het tellen van de verschillende niet-congruente ‘driehoeken’ beelden we ze af op de gele driehoek, net als in opgave 2 met de scherpste hoek op het kruisje, de langste roosterzijde horizontaal en de met de stompe hoek rechtsonder.

De afbeelding kan als volgt:
De figuur is symmetrisch t.o.v. rotatie over ±120°. Door te roteren kunnen we alle ‘driehoeken’ afbeelden op een ‘driehoek’ met de grootste roosterzijde horizontaal en onder. Door spiegelen in de verticale spiegelas van de figuur kunnen we ervoor zorgen dat de stompe hoek rechts komt. Het resultaat is dan altijd te verschuiven naar een ‘driehoek’ met de scherpste hoek op het blauwe kruisje de andere scherpe hoek in één van de blauwe stippen binnen of op de rand van de gele driehoek.


figuur 5

We kunnen dus weer de stippen tellen. Dat zijn er 11.
Dubbeltellingen bij verschillende niet-congruente ‘driehoeken’ komen bij deze kleine waarden niet voor, dus $D(27) \leq 11$, terwijl $R(27) = 13$, een verschil van minstens 2. Omdat $n = 27$ oneven is kan er nog wat van af. $R(26) = R(27)$, en $D(26) \leq D(27)$, dus $R(26) - D(26) \geq 2$. Het lukt dus ook met 26 punten. Het is niemand gelukt om dat verder te verbeteren.

Ook bij methode 3 kunnen er bij grotere waarden van n gelijke afstanden voorkomen anders dan wat direct uit de symmetrieën van het rooster volgt.
Dat gebeurt als voor twee getallenparen (a, b) en (c, d) de afstand gelijk is, dus als $a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd$. Ook in dit geval hebben we dus dubbelparen.

Opgave 6: Bepaal de kleinste twee afstanden tussen roosterpunten op isometrisch roosterpapier die elk minstens twee keer voorkomen, afgezien van wat direct uit de symmetrieën van het rooster volgt.
We vinden met wat proberen $7^2 = 5^2 + 3^2 + 5 \cdot 3 = 49$ dus (7, 0) en (5, 3) zijn een dubbelpaar. En ook $9^2 + 1^2 + 9 \cdot 1 = 6^2 + 5^2 + 6 \cdot 5 = 91$ dus (9, 1) en (6, 5) zijn een dubbelpaar.
Let wel dat we hier expliciet vroegen naar de twee kleinste afstanden. We hebben dus een groter rooster nodig dan dat van figuur 5 om met dubbelparen te maken te krijgen.

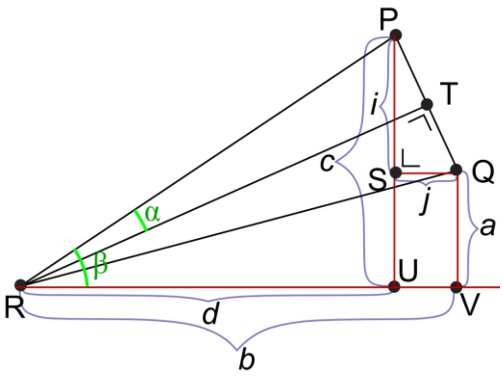
Extra voor de liefhebbers: U kent waarschijnlijk een methode om Pythagoras tripletten te genereren. Kunt u zo'n recept ook opstellen voor viertallen als 7, 1, 5, 5 (met $\sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$)? En voor gelijke afstanden in het driehoekenrooster die niet volgen uit de symmetrieën daarin?

Meerdere inzenders kwamen met oplossingen voor dit probleem. We geven hier de mooie oplossing van Frans van Hoeve, die voor beide vragen gebruik maakte van een zelfde aanpak. Wij voegden er de figuren 6 en 7 met toelichting aan toe. Hij gaf ook een methode om te bepalen welke waarden van zijn variabelen i en j van toepassing kunnen zijn voor gelijke afstanden tot een bepaalde lengte L. Wij scherpten dat nog wat aan.

We beginnen met het ***V*-rooster**.
We zoeken geheeltallige oplossingen voor de vergelijking $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ waarbij $a \neq c, d$.

(a, b, c, d) is een primitief viertal als geldt ggd(a, b, c, d) = 1. We zoeken primitieve viertallen want alle niet-primitieve zijn af te leiden uit de primitieve.

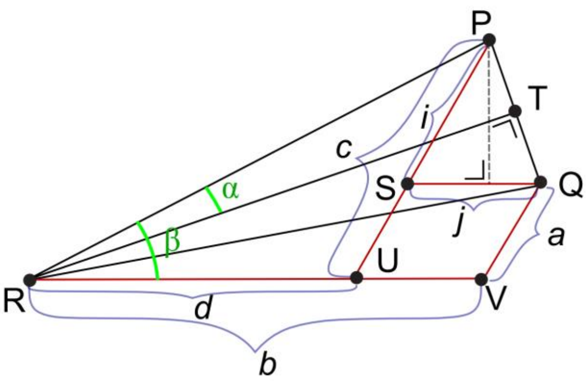
Het is snel na te gaan dat we kunnen zorgen dat:
$a < c \leq d < b$
We stellen nu $c = a + i$ en $d = b - j$ waarbij $i, j \in \mathbb{N}$.
In figuur 6 zijn ΔRVQ en ΔRUP de 'driehoeken' die bij de gelijke afstanden $PR = QR$ horen. De rode lijnen zijn roosterlijnen. Omdat $c \leq d$ is $\beta \leq 45°$. RT is de middelloodlijn van PQ. De lijnstukjes $i = c - a$ en $j = d - b$ zijn in de figuur terug te vinden.
Omdat $\angle T$ recht is geldt $\angle RPT = 90° - \alpha$ en natuurlijk is $\angle RPU = 90° - \beta$ dus $\angle QPS = \beta - \alpha < 45°$ Daaruit volgt $i > j$.



figuur 6

We hebben dan: $a^2 + b^2 = (a + i)^2 + (b - j)^2$ en dat levert op:
F1: $jb = ia + \frac{i^2 + j^2}{2}$; met $i > j$ en omdat $(i^2 + j^2)$ even moet zijn is $(i - j)$ ook even.
Alle mogelijke primitieve viertallen zijn te vinden via alle mogelijke combinaties van i, j en a.
Een paar voorbeelden:
1. $i = 3, j = 1 \Rightarrow b = 3a + 5 \Rightarrow$ (0,5,3,4); (1,8,4,7); …
2. $i = 5, j = 3 \Rightarrow 3b = 5a + 17 \Rightarrow a = 3m + 2, b = 5m + 9 \Rightarrow$ (2,9,7,6); (5,14,10,11); …

Voor het ***D*-rooster** volgen we dezelfde aanpak. De te vergelijken driehoeken zijn stomp met een hoek van 120°. Als de aanliggende zijden van de stompe hoek a en b zijn, dan is de lengte van de langste zijde c gelijk aan $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$
We zoeken weer geheeltallige, primitieve oplossingen voor de vergelijking
$a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd$ waarbij $a \neq c, d$. Ook nu kunnen we zorgen dat $a < c \leq d < b$
We stellen weer $c = a + i$ en $d = b - j$ waarbij $i, j \in \mathbb{N}$.
In figuur 7 zijn ΔRVQ en ΔRUP weer de 'driehoeken' die bij de gelijke afstanden $PR = QR$ horen. De rode lijnen zijn weer roosterlijnen. Nu geldt $\beta \leq 30°$. RT is weer de middelloodlijn van PQ. Ook de lijnstukjes $i = c - a$ en $j = d - b$ zijn weer in de figuur terug te vinden.
Omdat $\angle T$ recht is geldt ook hier $\angle RPT = 90° - \alpha$ en omdat $\angle RUP = 120°$ hebben we nu $\angle RPU = 60° - \beta$.
Dan is $\angle QPS = 30° + \beta - \alpha < 60°$. Daaruit volgt weer $i > j$.



figuur 7

Door onze afspraken over de ligging van de 'driehoeken' zijn RQ en RP altijd stijgende lijnen, en RT dus ook. Dan is PQ dus altijd dalend en ΔSQP scherphoekig. De loodlijn uit P op SQ verdeelt SQ dus in twee stukken, waarvan het linker stuk, doordat $\angle S = 60°$, gelijk is aan $i / 2$. We hebben dus $\frac{i}{2} < j < i$.

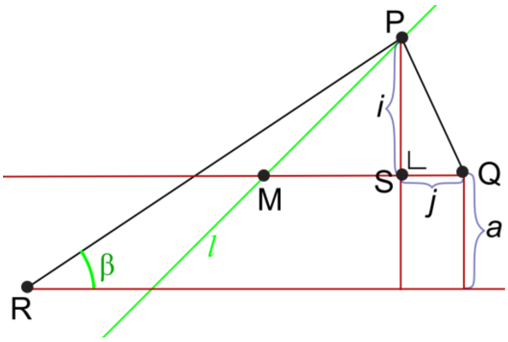
We hebben dan: $a^2 + b^2 + ab = (a + i)^2 + (b - j)^2 + (a + i)(b - j)$ en dat levert op:
F2: $(2j - i)b = (2i - j)a + (i - j)^2 + i \cdot j$ waarbij $i < 2j < 2i$
Alle mogelijke primitieve viertallen zijn te vinden via alle mogelijke combinaties van i en j.
Een paar voorbeelden:
1. $i = 3, j = 2 \Rightarrow b = 5a + 7 \Rightarrow$ (0,7,3,5); (1,12,4,9); …

2. $i = 7, j = 6$ => 5b = 8a + 43 => a = 5m + 4, b = 8m + 15
=> (4,15,11,9); (9,23,16,17); …

Stel dat we alle viertallen willen vinden met gelijke afstanden kleiner dan een bepaalde waarde L, welke i, j combinaties moeten we dan onderzoeken?

We doen dat eerst voor het **V-rooster** en gebruiken daarvoor een figuur die is afgeleid van figuur 6.

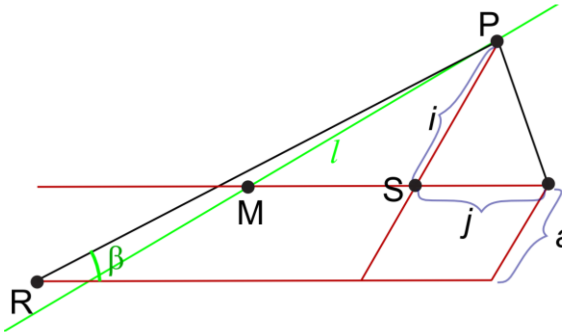
In figuur 8 zijn een aantal punten en lijnen uit figuur 6 verwijderd. Toegevoegd is de lijn l door P die de roosterlijn door Q en S in M snijdt onder een hoek van 45°.
ΔPQS is overgebleven met i en j als rechthoekszijden.



figuur 8

Dan is $MP = i\sqrt{2}$.
Omdat β <45° en omdat a niet negatief kan zijn is uit de figuur direct te zien dat $RP > MP$, dus $RP > i\sqrt{2}$.
Als L de maximale afstand is waarvoor we dubbelparen zoeken dan moeten we dus waarden van i hebben waarvoor geldt: $i\sqrt{2} < L$ en dus $\boldsymbol{i < L / \sqrt{2}}$. Omdat $j < i$ hebben we dus maar een beperkt aantal waarden die we moeten bekijken.

In het **D-rooster** wordt dat:
Figuur 9 is weer een wat gereduceerde versie van figuur 7.
De lijn l maakt nu een hoek van 30° met de horizontale roosterlijnen.



figuur 9

Nu is $MP = i\sqrt{3}$.
Omdat β <30° geldt ook hier: $RP > MP$
Als L weer de maximale afstand is waarvoor we dubbelparen zoeken moet nu gelden: $i\sqrt{3} < L$ en dus $\boldsymbol{i < L / \sqrt{3}}$. Ook hier hebben we dan een beperkt aantal i, j combinaties te onderzoeken.

NOOT

[1] Brandhof, A. van den & Derk, P. (2015). Een afstandprobleem. *Pythagoras* (54)3. Te vinden op: *http://www.pyth.eu/jaargangen/Pyth54-3.pdf*